TITLE:
スピングラスの代数方程式について(数式処理と数学研究への応用)

AUTHOR(S):
一松, 信

CITATION:
一松, 信. スピングラスの代数方程式について(数式処理と数学研究への応用). 数理解析研究所講究録 1988, 646: 1-6

ISSUE DATE:
1988-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/100270

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
646巻 1988年 1-6

スピングラスの代数方程式について

京都大学数理解析研究所／一松　信(Sin Hitotumatu)

1．問題　標題の問題は、正しくは「スピングラスの統計力学系を記述する積分方程式に対する代数方程式」とでもいうべきだか、上のように略称する。それはパラメタの個数nの場合；

2n+1個の変数 $x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ に対する

$$(*)\qquad x_{-i}=x_i\ (i=1,\ldots,n);\quad \sum_{i=-n}^{n} x_i=1;\quad \sum_{i=-n+j}^{n} x_i x_{i-j}=x_j\ (j=0,1,\ldots,n-1)$$

という合計2n+1個の代数方程式である。普通には最初の関係により、負の番号を消去して n+1個の未知数の n+1個の連立代数方程式として扱う。

この方程式系は 2^n 個の根を持ちすべて単根だが、余り一般的な共通性質がわかっていない。物理学上で重要なその実根の個数も、各nについて解いて見るしかない。（物理学でほしいのは $n\to\infty$ の極限である。）

一応 Gröbner基底を作ることによって理論上では解けるはずだが、具体的な計算はnが増えると急に難しくなる。そのために近年では数式処理の絶好の演習問題とされている。例えば n=1は高等学校 1年の数学I の範囲、n=2 は大学入試問題級だが、n=3 は以下に述べるように手で解ける限界であり、計算機でさえデータを入れれば直に答が出るというわけにはゆかない。$n\geqq 4$ は計算機によらなければ不可能と思われる。最近東大の森継氏がn=5 のときを強引に18時間かけて答を求めたという状況である。

一般に(*) で nが pの倍数の場合、p の倍数以外の番号i の x_i を0 とおくと n/p の場合に帰着されるので、いくつかの特別な解がわかる。特にp=n として、次のような解がつねに存在する。以下これらを「特殊解」と呼ぶ。

$$x_0=1,\ \text{他の}\ x_i=0;\quad x_0=x_n=x_{-n}=1/3,\ \text{他の}\ x_i=0\ .$$

$n\leqq 2$ のときはすべて実根だが、$n\geqq 3$ のときには複素根がある。以下n=3 の場合を考察する。

<u>2．n=3 の場合の消去</u>　n=3 の場合、負の番号を消去して x_0, x_1, x_2, x_3 をそれぞれ x,y,z,w と書くと、方程式は次のようになる。

(1) $$2(w+z+y)+x=1$$

(2) $$2(w^2+z^2+y^2)+x^2=x$$

(3) $$2(wz+zy+yx)=y$$

(4) $$2(wy+zx)+y^2=z$$

計算機でも w,y,zの順序に消去すると早いということである。 手計算でもそうする。

まず(1)Xz-(3), (1)Xy-(4)を作ってw を消去して整理すると

(5A) $$y(2x-1)=z(2z+x-1)$$

(5B) $$z(2x-1)=y(2z+x-1)+y^2$$

をうる。 両者を加えると次の式になる。

(5) $$(y+z)(2z-x)+y^2=0$$ 。

これらと重複する部分もあるが (3)Xy-(4)Xzを作ると

(6) $$(y^2-z^2)(2x-1)+y^2z=0$$

をうる。 次に (2)÷２+(3)+(4)を作り、$(w+z+y)^2$ に(1) を代入すると

(7) $$(2x-1)(y+z)+y + \tfrac{1}{4}\cdot(3x-1)(x-1)=0$$

となる。 (7)-(5) を作ると次の式をうる。

(8A) $$(y+z)(3x-2z-1)+ \tfrac{1}{4}\cdot(3x-1)(x-1)=0$$

ここで 3x-2z-1=0とすると、 x=1またはx=⅓ だから、特殊解になるのでこれを除外する。 そうすると

(8) $$y+z=(3x-1)(x-1)/4(2z-3x+1)$$

をうる。 他方(5) のy^2 の項を (6)の y^2zに代入すると、全体が y+zでくくれる。

しかしy+z=0 とすると (8)から x=1またはx=⅓, (5) からy=0 となり、特殊解に帰する。 ゆえにy+z で割って

(6A) $$(2x-1)(y-z)=z(2z-x)$$

となる。　ところが $x=½$ とすると、(6) から $yz=0$, (7) から $y^2=1/16$ となり $z=0$ となるが、これらは(5B)と矛盾する。　ゆえに x は ½ ではなく、次のように書いてよい。もっとも この式は (5A)から 直接に導びかれる。

(9) $$y-z=z(2z-x)/(2x-1)$$

(8)-(9)から zを xと zとの有理式で表すことができる。　その分母を払うと

(10A) $$(3x-1)(2x-1)(x-1)=4z(2z+3x-2)(2z-3x+1)$$

となる。　これを展開して、zの 3次式に整理すると次の式になる。

(10) $$16z^3-8z^2-4(3x-1)(3x-2)z-(3x-1)(2x-1)(x-1)=0$$

他方(8)+(9) からy を求め、y を(5) に代入して (10A)を使うと、0 でないと仮定してよい項 $z/4(2x-1)^2$ がまとめられて

(11A) $$z(2z+x-1)^2+(2x-1)(2z-2)(2z+3x-2)=0$$

となる。　これを展開整理すると

(11) $$4z^3+4(3x-2)z^2+(x-1)(9x-5)z-x(3x-2)(2x-1)=0$$

となる。　後は(10)と(11)とを連立させて解けばよい。　(10)-4X(11) を作ると 2次式になるが、幸運にもそれは0 でないと仮定してよい $2x-1$ でくくれる。　一こういう部分は手計算では直にわかるが、計算機に自動的に判定させるのはかなり難しい。一　それを除くと

(12) $$24z^2+4(9x-7)z-(9x^2-4x-1)=0$$

となる。　(10)または(11)に定数を乗じて(12)で割れば、その剰余は

(13) $$2z(27x^2-48x+17)-(135x^3-171x^2+61x-5)=0$$

となる。　この 2つの xの多項式は共通根を持たないので、割算により zを xの有理式で表し、(12)に代入して整理すると、最終的に次のような xの 6次式になる。

(14) $$168399x^6-501552x^5+689687x^4-385848x^3+133245x^2-23544x+1629$$
$$=9(77\times3^5x^6-688\times3^4x^5+2509\times3^3x^4-42872x^3+1645\times3^2x^2-872\times3x+181)=0$$

これは $3x=X$ と置換えて、次の形で解いた方がよい。

(14A) $$693X^6-6192X^5+22581X^4-42872X^3+44415X^2-23544X+4887=0$$

3．6次方程式の解法　方程式(14)は Sturmの定理などの標準的な手法により、4個の実根と1対の複素根を有し、すべての根が右半平面にあることがわかる。 その検算にはまず(13)すなわち

(13A)　$$2z=(5X^3-19X^2+20\tfrac{1}{3}\ X-5)/(3X^2-16X+17)$$

によって zを求める。 次に(8) と(9) とから独立に yを求めて、両者の差を見るとよい。 ただし(13A) の計算ではかなりひどい桁落を生ずる。

(14)は標準的な Durand-Kerner法でもBairstow法でも一応解ける。 Xの近似値は次の通りである。

$$X = 0.562779965,\ 1.32002245,\ 1.69822553,\ 2.23883409,$$
$$1.55760144 \pm i\ 0.26572441$$

しかし誤差判定を10^{-7}にしたときには上のような答が出たが、10^{-8}にすると収束しなくなった。 これは係数が5桁の数であり、倍長（10進12桁）計算では小数点以下7桁目が怪しい上に、根が密集していて導関数の値が意外に小さいせいらしい。

そこで係数を小さくする変換を試みた。 当面の方程式は、係数が厳密な整数であって係数に誤差がないから、そのような変換は意味がある。 X-1.5 も試したが、X-1 が意外によい式（係数が小さい整数である上に2 の累乗で割れるものが多い）になった。 その逆数をとりさらに平行移動して5次の項を消すと、次のようになった。 ―もっともこれには当面の方程式の特殊性がきいているし、また人間の判断が大きいので、自動化は困難であろう。―

(15)　$$T^6-30T^4+72T^3-96T^2+18T+26=0,$$
ここに　$T=2/(X-1)-2$，

(15)を解いて Xに戻し、それからz,y,w を求めた結果を別表1に示す。Δy(yの差)という量は(8) と(9) とから求めたy 同志の差である。

4．初期値推定のための朴の方法　これについては，韓国柳韓工業専門大学の朴鳳圭(Park Bong-Kyu) 教授による方法がある。

表 1

(15) の解 T	対応する X	x
−6.57435579740	0.562779965403	0.187593321801
−0.385578818797	2.23883409317	0.746278031057
0.864403949676	1.69822554191	0.566075180637
4.24956154493	1.32002245048	0.440007483493
0.922984560775	1.55760144206	0.519200480687
±i 1.39294538426	±i 0.265724412436	±i 0.0885748041453

z	y	w	$\|\Delta y\|$	
0.073594710569	0.078353753161	0.25425487537	1E−11	
−0.18460794556	0.233474496416	0.077994433616	5E−12	
0.255539571659	0.149193560327	−0.187770722304	2E−11	
0.105760256794	0.307159047995	−0.132923046535	8E−12	
0.264467092880	−0.215259260161	0.191191926896	2E−11	(複素根)
∓i 0.109231447915	∓i 0.038432670672	±i 0.103376721923	i 1E−11	複号同順

— — — — — — — — — — — — — — —

その考えは、まず6次方程式を平行移動して5次の項を消して

$$x^6+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

とし、この左辺を $(x^3+\alpha_1 x+\beta_1)(x^3+\alpha_2 x+\beta_2)$ と書く。　もちろんそれには6個の根の内3個ずつの和が等しいという条件がいるので、特別な方程式にしか使えない。　特に3対の複素根の場合には、実数の範囲ではこのように変換することはできない。

それにもかかわらず、Newton法の初期値を求めるのには有用な場合が多い。当面の方程式もそうである。

その詳細は、並列処理のアルゴリズムに関する研究集会報告集に述べる。

5．結び　その後朴の方法による初期値の誤差解析も試みたが、それはまたの機会に譲る。 この方法は、適用範囲が限られているために、数学的な算法としては問題があるが、「うまくゆけば儲けもの」という手法も、実用上では意味があると思う。 この計算は、既に計算機で解けている問題を手で解いたという、夏休みのお遊びにすぎないが、やってみて「代数方程式の難しさ」を改めて感じた。

問題点の第１は Gröbner基底などの理論があっても、実際に適用する場面では、項の順序付といった「泥臭い」しかし本質的な問題が残っていることである。

第２はNewton法やBairstow法はもちろんのこと、 Durand-Kerner法のように大域的な収束性をもつ公式でさえも、よい初期値の工夫が不可欠なことを再確認した。 方程式(14A) を、初期値を手で入れてBairstow法で解いてみると、意外に多くの場合に収束した結果は２実根の組合せになり、複素根を与える初期値の範囲は狭い。 多分それらの境界は一種のフラクタルになっているのだろう。 ーこれは理論もさることながら、マイコンが充分に使える方に実験を試みてほしいと思っている。ー

第３には上のような係数を小さくする工夫の「一般化」である。 百発百中とはいかなくても、いくつかの標準変換を用意してどれかを試み、当れば幸といった工夫が出来ないものだろうか。 色々と考えは浮かぶのだが、残念ながらそれら一つ一つを追及している暇がない状況である。 大学院の学生などで、そういったヒントを堀下げて下さる方があれば幸に思う。

参考文献 [1] 桂重俊 他：ランダムスピン系の統計力学における積分方程式，数理解析研講究録 No. 486 (1983)，p. 166－175

[2] 朴鳳圭・一松信：ある種の6次方程式の数値解法，数理解析研講究録：並列処理のアルゴリズム，に予定

[3] 一松信：bitナノピコ教室解答，bit 1988年2月号，p.129－131